Algebra lineare	dott. Enrico Sbarra • http://www.dm.unipi.it/~sbarra	2 Ottobre 2013

Libro consigliato: Geometria di Carla Petronio — orario: Merc. 8.30-11.30 Sab. 8.30-10.30
ricevimento: Giovedì 14.30/16.30
2 compitini intermedi - (1 tra 6 settimane) - esame

Programma: Algebra lineare — studio di spazi vettoriali e risoluzione di sistemi lineari
Geometria — nel piano e nello spazio
⇒ studiare una struttura → insiemi con operazioni

① 9/11 8-11
② 21/12 8-11

Insiemi con operazioni

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

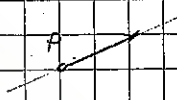
$\mathbb{N}$ = n. naturali $\{1,2,3\ldots\}$ $\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2 \ldots\}$ $\mathbb{Q}$ = numeri $\left\{ \frac{m}{n} ;\ m,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$ $\mathbb{R}$ = n. reali

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

operazioni:
- gruppo, 1 op (generalmente +)
- anello, 2 op
- campo, 2 op
- spazio vettoriale, 2 op — una interna ed una esterna (a numero ed a vettore)

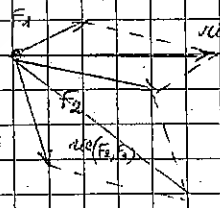
funzione $(A, B \quad f: A \to B)$

Motivazioni — Forze applicate ad un punto P → vettore



direzione: retta su cui giace; verso: freccia; modulo: intensità della forza

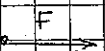
a. forza risultante data come diagonale del parallelogramma — $ris(F_1, F_2) = ris(F_2, F_1)$



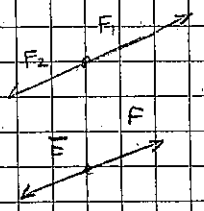
gode delle stesse prop dell'addiz

b. applicando una terza forza:
$ris(F_1, ris(F_2, F_3)) = ris(ris(F_1, F_2), F_3)$
che indipendente dall'ordine

c. $ris(0; F) = F$ ← forza nulla



giacendo le due forze sulla stessa retta risultante con stessa direzione e somma intensità se hanno stesso verso; se hanno verso opposto stessa direz, verso di quella maggiore ed intensità come differenza



d. $ris(F, \bar{F}) = 0$, ove $\bar{F}$ è la forza con la stessa intensità e direz di F e V. op.

Operazione +: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (funzione; numero)

$(m, n) \longrightarrow +(m, n) =: m+n$

A, B insiemi

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ prodotto cartesiano

Proprietà:
a. p. commutativa → $a+b = b+a$ [$\forall$ a,b num] che ha l'insieme delle coppie
b. p. associativa — non importa ordine, risultato non cambia
c. esistenza dell'elemento neutro (0) rispetto alla somma + $(0 \in \mathbb{Z})$
d. $\exists$ elemento opposto

a. $\forall m, n \in \mathbb{Z}$: $m+n = n+m \sim +(m,n) = +(n,m)$ con cui scelte si stabilisce l'ordine

b. $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}$: $(m+n)+p = m+(n+p) \sim +(+(m,n),p) = +(m,+(n,p))$

c. $0 \in \mathbb{Z}$ $\forall m \in \mathbb{Z}$: $m+0 = 0+m = m \sim +(m,0) = +(0;m) = m$

d. $\forall m \in \mathbb{Z}$ $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ / $m+m' = 0 \sim -m := m'$

$\forall F, F'$ forze applicate ad un punto P : $F + F' :=$ ris (F_1, F_2) (definizione) gode delle stesse prop. formali della somma.

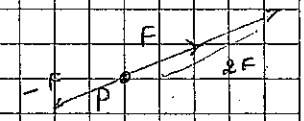
$X \times X \longrightarrow X$

$(F, F') \longrightarrow$ ris (F_1, F_2)

- "Scalare" una forza, variandone l'intensità

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, F forza applicata in un punto P

λF è uno SCALARE = un numero che si moltiplica



□ $\bullet$: associa al risultato : $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ proprietà : $\circ\ (\lambda_1, \lambda_2) F = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot F)$

$(\lambda, F) \longrightarrow \lambda F$

Moltiplicazione di uno scalare per un vettore — operazione in $\mathbb{R}$ e esterno

$\circ\ (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot F = \lambda_1 F + \lambda_2 \cdot F$

$\bullet \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall F \in X$ e $\forall f_1, f_2 \in X$ — che è un'operazione esterna — distributività del prodotto

$\circ\ \lambda \cdot (F_1 + F_2) = \lambda \cdot F_1 + \lambda F_2$

$\circ\ \lambda \cdot 0 = \omega \cdot F = 0$ (forza nulla) — forza nulla 0 di $\mathbb{R}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312123
Cell. 388 9837745

Motivazioni

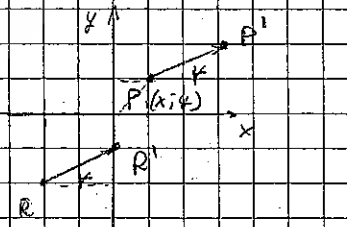
- Traslazioni nel piano



$P = (x;y)$ coordinate di P , $P' = (x', y')$ ← sequenza di coord. in orizzontale

$P' \begin{cases} x_1 = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

coordinate come coord. della testa del vettore somma.



$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

vettore colonna (coppie scritte in verticale) $P' = P + V$

Questo suppone di introdurre un'operazione nei vettori colonna.

$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ y+\omega \end{pmatrix}$

Elemento neutro del vettore colonna $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

opposto di $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\overline{P} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} =: -P$ $=: +\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} \right)$

prop. associativa $\forall P_1, P_2, P_3$ $P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3$ — gode delle proprietà commutativa ed associativa

la somma di 2 vett. colonna è la somma di componente per componente

Caso nel quale si hanno 2 forze applicate all'origine

disegno nella pag. seguente

- Omotetie :

di ragione $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, centrate in O;

Trasformano un punto del piano P in un punto P' che giace sulla stessa retta che contiene O e P. La distanza di P' da O (e quindi la posizione di P') viene determinata da λ ($\lambda \neq 0 \ \forall \in \mathbb{R}$)

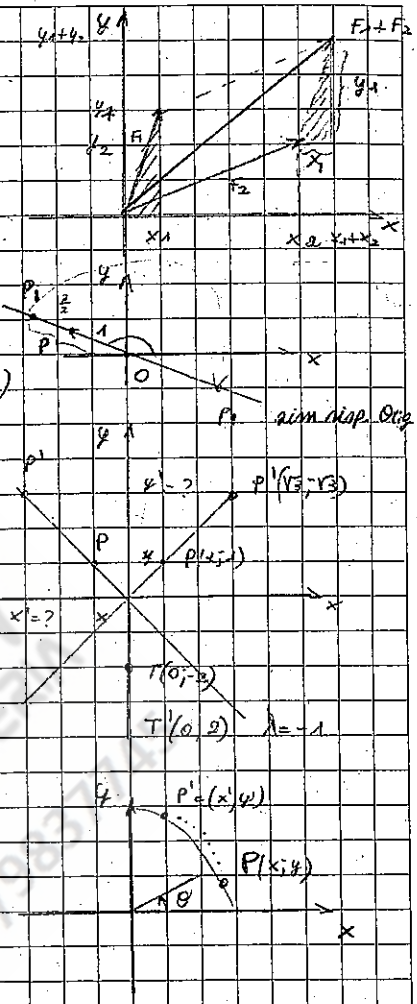
(come uno zoom)

$$d(OP') = |\lambda| \, d(O,P)$$

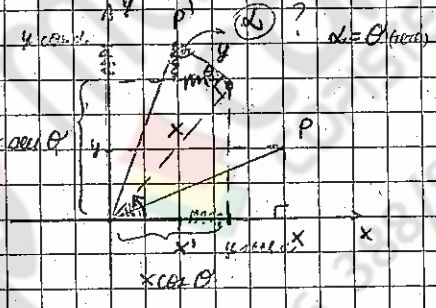
(in R quindi $\neq 0$)

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\neq 0$ $\qquad P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ($\lambda \neq 0$)

$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = \sqrt{3}$ $\quad P\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$



- Rotazioni :



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y \\ y' = \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

matrice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \boxed{*} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

? = nuova operazione : matrice 2×2 moltiplicata per un vettore colonna 2×1

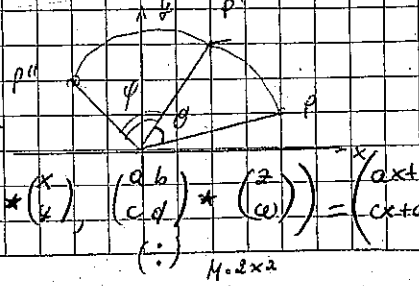
$$* \quad M_{2\times 2} \times C_{2\times 1} \to C_{2\times 1}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Definizione: $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}}$ $\quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Composizione di 2 rotazioni di angoli θ e φ $(\equiv) = (\theta + \varphi)$ dalla prima.

$$R_{\theta+\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$



Nuova operazione : $M \times M \to M$

$$\boxed{\bullet} \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & z \\ y & \omega \end{pmatrix}\right) \to \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax+by & az+b\omega \\ cx+dy & cz+d\omega \end{pmatrix}$$

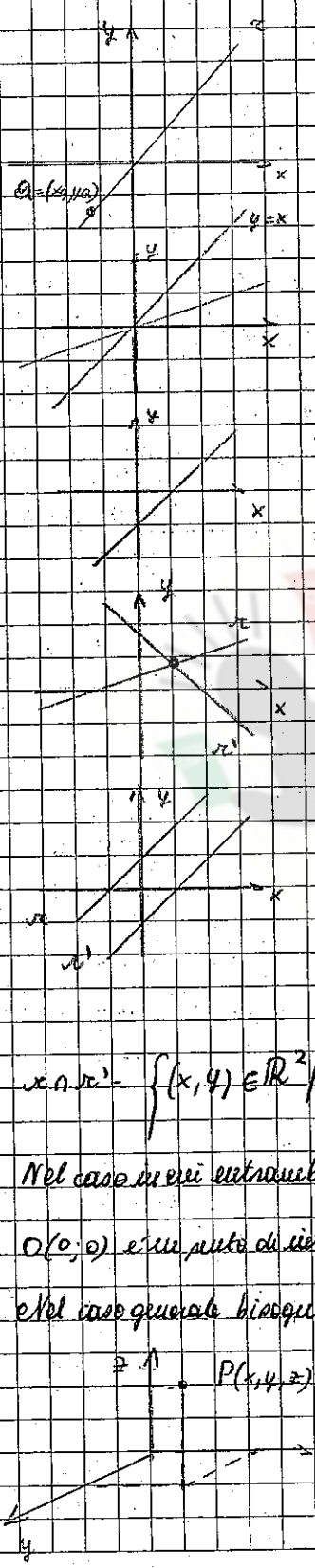
$(\cdot)$ $\qquad (\cdot)$ $\qquad M_{2\times 2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$R_\theta \cdot R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & -(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi) \\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} \quad R_{\theta+\varphi} = R_\theta \boxdot R_\varphi$$

Nuove strutture che ci permettono di calcolare gli spazi vettoriali



$Q \in t$ 5 Ottobre 2013

Se t: $ax+by = c \overset{(=0)}{\Rightarrow} ax_q + by_q = c$ $\quad x-y=0$, $x_q - y_q = 0$, $x_q = y_q$

$ax+by=c$ eq. della retta

$a\cdot 0 + b\cdot 0 = c \Rightarrow c=0$ passa per l'orig.

$x=0$ (asse ordinate) $\quad y = mx$ e $y = \frac{a}{b}x$

$ax+by=0 \Rightarrow by = -ax \quad b=0$ (retta vert) $\quad b\neq 0$

Equazione di una **Retta del piano**

$$ax+by=c$$ — equazione lineare

Intersezione tra due rette r ed r' nel piano

O sono coincidenti $r=r'$, oppure sono incidenti, o //

$r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$

insieme delle coppie x,y che sono legate da questa relazione

$r = ax+by+c=0$

$r' = a'x+b'y+c' = 0$

$r' = \{(x,y) \mid a'x+b'y+c=0\}$

$X \times Y = \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}$

$X = Y = \mathbb{R} \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$A\cap B = \{x \mid x\in A, x\in B\}$

$r \cap r' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{matrix}\}$ Sistema tra le due rette

$A \cap B$

Nel caso in cui entrambe passino per O ($c=c'=0$) $\Rightarrow$ è equivalente ad una equazione

O(0,0) è un punto di int. comune e dipendono tra i rapporti di $\frac{a}{a'}$ e $\frac{b}{b'}$

Nel caso generale bisogna tenere conto anche dei rapporti tra c e c'

$\Pi_{xy} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \Pi_{xy} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

(il piano x,y è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$) $\quad ax+by+cz+d=0$ con $a=b=d=0$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\pi_{xz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$

$\pi_{yz} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

Equazione del piano in $\mathbb{R}^3$: $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ — se passa per $0 \Rightarrow d = 0$

Se $0 \in \pi$ (piano che passa per $O(0,0)$) $\Rightarrow a x_0 + b y_0 + c z_0 + d = 0$ — d è ricavato dalla direzione della sua perpend.

Nello spazio — una equazione da un piano
Nel piano — una equazione da una retta

Un piano può essere ruotato (↻), tutte (coincidenti) se si intersecano generano una retta (qualcosa di dim. inferiore)

a) $\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$

$\pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a'x + b'y + c'z = d'\}$

$\pi_1 \cap \pi_2 \neq 0$

Es. $\pi_1 : x + y + z = 0$

$\pi_2 : 2x + 2y + 2z = 5 \Rightarrow 2(x+y+z) = \frac{5}{2}$ — Non sono lo stesso piano

$\Omega : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ S = spazio delle soluzioni di questo sistema

① $|S = 0|$ — nessuna soluzione $\Rightarrow$ piani paralleli $S = \phi$

② $S = \pi_1 = \pi_2$ — ∞ soluzioni

③ $S = r$ — ∞ soluzioni perché una retta corrisponde ad infiniti punti

Ogni piano si può considerare come il traslato del suo passante per l'origine degli assi.

Intersezione tra 3 piani : $(\pi_1 \cap \pi_2) \cap \pi_3$ (Sistema a 3 eq. a 3 incognite, prima ∩ tra i primi 2 (3 casi) e poi con il terzo)

① ϕ ② r ③ $\pi_1 = \pi_2$

$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

$\cap \pi_3$ ① ϕ ② r ③ $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

ϕ $\cap \pi_3$

① ϕ $|S| = 0$

② $r = \pi_3 \Rightarrow r$ $|S| = \infty$

③ P (punto) — intersezione con ciascuno 0 $|S| = 1$

(x_P, y_P, z_P)

Sistemi con n variabili ed m equazioni

$\Omega \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ può essere associata ad una matrice $\longrightarrow$

$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} \quad\quad a_{mn} \end{pmatrix}$ (i,j) — cioè c'è un numero a ciascuna intersezione

Matrice dei coefficienti del sistema S

$m \times n$

$b =$ vettore colonna dei termini noti $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$